Atiyah-MacDonald 可換代数入門 第 6 章演習問題解答

flag3 (`@flag3833753`)

2020 年 5 月 14 日 (最終更新日：2021 年 5 月 15 日)

概要

Atiyah-MacDonald 可換代数入門 [1] 第 6 章の演習問題の解答をまとめたものである．

6 連鎖条件

演習問題

1. i) 部分加群の昇鎖 $\mathrm{Ker}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u^2) \subseteq \cdots$ を考える．昇鎖条件によって，この昇鎖は停留的である．すなわち，ある整数 n が存在して $\mathrm{Ker}(u^n) = \mathrm{Ker}(u^{n+1}) = \cdots$ となる．u は全射より u^n は全射であるので，$x \in M$ が $u(x) = 0$ ならば $x = u^n(y)$ となる $y \in M$ が存在して，$u^{n+1}(y) = u(x) = 0$ より $y \in \mathrm{Ker}(u^{n+1}) = \mathrm{Ker}(u^n)$ となり，$x = u^n(y) = 0$ である．すなわち u は単射である．よって u は同型写像である．

   ii) 部分加群の降鎖 $\mathrm{Im}(u) \supseteq \mathrm{Im}(u^2) \supseteq \cdots$ を考える．降鎖条件によって，この降鎖は停留的である．すなわち，ある整数 n が存在して $\mathrm{Im}(u^n) = \mathrm{Im}(u^{n+1}) = \cdots$ となる．$x \in M$ に対し $u^n(x) \in \mathrm{Im}(u^n) = \mathrm{Im}(u^{n+1})$ より $u^n(x) = u^{n+1}(y)$ となる $y \in M$ が存在する．u は単射より u^n は単射であるので，$x = u(y)$ である．すなわち u は全射である．よって u は同型写像である．

2. N を M の部分加群とし，Σ を N のすべての有限生成部分加群の集合とすると，命題 6.2 の証明と同様にして N は Σ の極大元で有限生成となるので，命題 6.2 より M はネーター加群となる．

3. 系 6.4 より $M/N_1 \oplus M/N_2$ はネーター加群であり自然な写像 $M/(N_1 \cap N_2) \to M/N_1 \oplus M/N_2$ は単射なので命題 6.3 より $M/(N_1 \cap N_2)$ はネーター加群となる．アルティン加群の場合も同様である．

4. $x_1, \ldots, x_n$ を M の生成系とする．系 6.4 より M^n はネーター A-加群であり，$a \mapsto (ax_1, \ldots, ax_n)$ によって定義される写像 $A \to M^n$ は単射 $A/\mathfrak{a} \to M^n$ を誘導するので，命題 6.3 によって，$A/\mathfrak{a}$ はネーター A-加群である．ゆえに，$A/\mathfrak{a}$ はネーター $A/\mathfrak{a}$-加群であるので，ネーター環である．

   p を固定した素数とし，G を位数が p のベキであるすべての元からなる $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ の部分群とすると，G はアルティン $\mathbb{Z}$-加群であるが，G の零化イデアルは (0) で $\mathbb{Z}/(0)$ はアルティン環ではない．

5. Y を X の部分空間，$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots$ を Y の閉集合の降鎖とする．このとき，$\overline{Y_n}$ を Y_n の X における閉包とすると $\overline{Y_1} \supseteq \overline{Y_2} \supseteq \cdots$ は X の閉集合の降鎖であり，降鎖条件によって，この降鎖は停留的である．すなわち，ある整数 n が存在して $\overline{Y_n} = \overline{Y_{n+1}} = \cdots$ となる．よって $Y_n = \overline{Y_n} \cap Y$ より $Y_n = Y_{n+1} = \cdots$ となるので，Y の閉集合の降鎖は停留的であり，Y はネーター空間である．

   $\{X_i\}_{i \in I}$ を X の開被覆とする．集合 X_i の有限個の和集合全体の集合は，空でないから極大元 Y をもつ．すべての $i \in I$ に対して $Y \cup X_i = Y$ であるから，$Y = X$ となり，X は準コンパクトである．

6. i) $\Longrightarrow$ iii)　演習問題 5 より X の部分空間はネーター空間であり，準コンパクトである．
   iii) $\Longrightarrow$ ii)　明らか．
   ii) $\Longrightarrow$ i)　$X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots$ を X の開集合の昇鎖とする．X_n 全体の和集合 Y は開集合なので準コンパクトであり，$\{X_n\}_n$ は Y の開被覆であるから，Y は X_n の有限個の和集合となるので，ある整数 n が存在して $Y = X_n$ となる．よって $X_n = X_{n+1} = \cdots$ となるので，この昇鎖は停留的である．
7. 有限個の既約な閉集合の和集合で表されない X の閉部分集合の集合を Σ とする．$\Sigma \neq \emptyset$ と仮定すると極小元 Y をもつ．Y は空ではなく，既約でもないので，Y と異なる閉集合 Y_1, Y_2 の和集合と表される．このとき，極小性により $Y_1, Y_2 \notin \Sigma$ である．したがって Σ の定義より $Y \notin \Sigma$ となり矛盾する．
8. $\mathrm{Spec}(A)$ の閉集合は，イデアル $\mathfrak{a} \subseteq A$ によって $V(\mathfrak{a})$ と表される．$\mathrm{Spec}(A)$ の閉集合の降鎖 $V(\mathfrak{a}_1) \supseteq V(\mathfrak{a}_2) \supseteq \cdots$ を考える．このとき $r(\mathfrak{a}_1) \subseteq r(\mathfrak{a}_2) \subseteq \cdots$ はイデアルの昇鎖より，昇鎖条件によって，この昇鎖は停留的である．すなわち，ある整数 n が存在して $r(\mathfrak{a}_n) = r(\mathfrak{a}_{n+1}) = \cdots$ となる．よって $V(r(\mathfrak{a}_n)) = V(\mathfrak{a}_n)$ より $V(\mathfrak{a}_n) = V(\mathfrak{a}_{n+1}) = \cdots$ となるので降鎖は停留的である．
   $A = k[x_1, x_2, \ldots]$ を体 k 上の可算無限個の不定元 x_n に関する多項式環とし，A のイデアル $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a} = (x_1, x_2^2, \ldots, x_n^n, \ldots)$ とする．このとき，環 $B = A/\mathfrak{a}$ は唯一つの素イデアルをもつので，$\mathrm{Spec}(B)$ はネーター空間である．一方，その素イデアルは有限生成でないので，B はネーター環ではない．
9. A をネーター環とする．演習問題 8 から，$X = \mathrm{Spec}(A)$ はネーター空間であり，演習問題 7 から，X の既約成分の集合は有限である．よって，第 1 章，演習問題 20 iv) より X の既約成分は A の極小素イデアル $\mathfrak{p}$ を用いて $V(\mathfrak{p})$ と表されることから従う．
10. 命題 6.2 より M は有限生成であり，$\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(M)$ とすると，第 3 章，演習問題 19 v) より $\mathrm{Supp}(M) = V(\mathfrak{a})$ である．よって $\mathrm{Supp}(M)$ は $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ と同相であり，演習問題 4 より $A/\mathfrak{a}$ はネーター環であるので，演習問題 8 より $\mathrm{Supp}(M)$ はネーター空間である．
11. $f^*\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ が閉写像ならば f が上昇性質をもつことは第 5 章，演習問題 10 で示した．f が上昇性質をもつとき，X を $\mathrm{Spec}(B)$ の閉集合とすると，演習問題 5 より X はネーター空間であるので，演習問題 7 より X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ を X の既約な閉集合として $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ とかける．よって $f^*(X) = \bigcup_{i=1}^n f^*(X_i)$ より X を $\mathrm{Spec}(B)$ の既約な閉集合としてもよい．このとき X は素イデアル $\mathfrak{q} \subseteq B$ によって $X = V(\mathfrak{q})$ と表せる．$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$ とおくと，第 5 章，演習問題 10 より $f^*\colon \mathrm{Spec}(B/\mathfrak{q}) \to \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p})$ は全射であるので $f^*(V(\mathfrak{q})) = V(\mathfrak{p})$ となり f^* は閉写像となる．
12. 素イデアルの昇鎖 $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \cdots$ を考える．$V(\mathfrak{p}_1) \supseteq V(\mathfrak{p}_2) \supseteq \cdots$ は閉集合の降鎖より，降鎖条件によって，この降鎖は停留的である．すなわち，ある整数 n が存在して $V(\mathfrak{p}_n) = V(\mathfrak{p}_{n+1}) = \cdots$ となる．よって $\mathfrak{p}_n \in V(\mathfrak{p}_n) = V(\mathfrak{p}_{n+1}) = \cdots$ より $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_{n+1} = \cdots$ となるので昇鎖は停留的である．
    $A = \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}/(2)$ とし，n 以下の成分が 1，n より大きい成分が 0 である A の元を e_n とおくと，開集合の昇鎖 $X_{e_0} \subset X_{e_1} \subset \cdots$ は停留しないので $\mathrm{Spec}(A)$ はネーター空間ではない．一方，A はブール環であり，第 1 章，演習問題 11 よりすべての素イデアルは極大イデアルであるので，素イデアル全体の集合は昇鎖条件を満たす．

参考文献

[1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald. Atiyah-MacDonald 可換代数入門. 共立出版, 2006. 新妻弘 訳.

[2] N. Bourbaki. 可換代数 1. ブルバキ数学原論 / ブルバキ [著]. 東京図書, 1971. 木下素夫 訳.