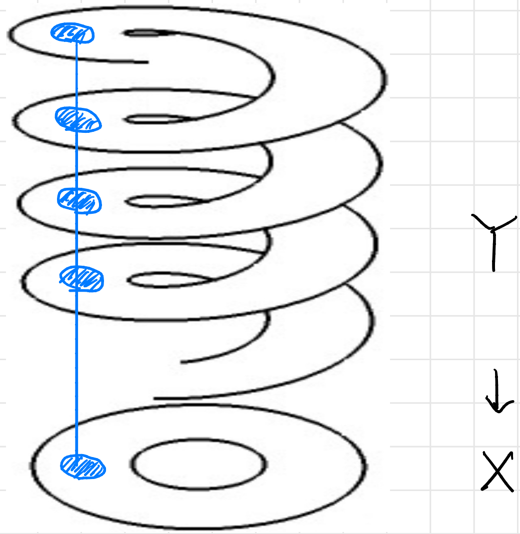
被覆空間の

絵をかくと…

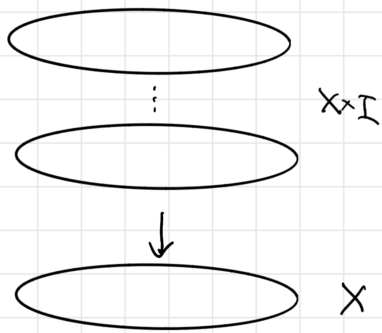



被覆空間の例

**e.g. 1.5** I : 離散空間に対し

$$p : X \times I \to X$$
$$(x, i) \mapsto x$$

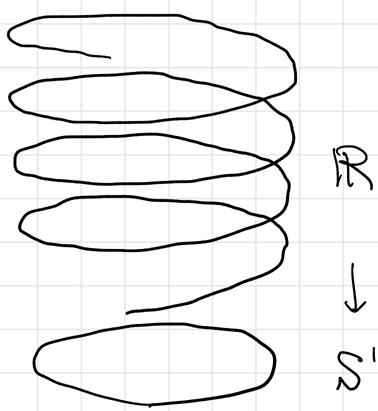
は被覆空間



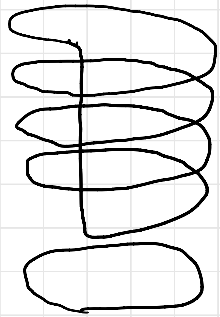

**e.g. 1.6** $S^1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$

として $p : \mathbb{R} \to S^1$
$$x \mapsto (\cos x, \sin x)$$

は被覆空間



e.g.

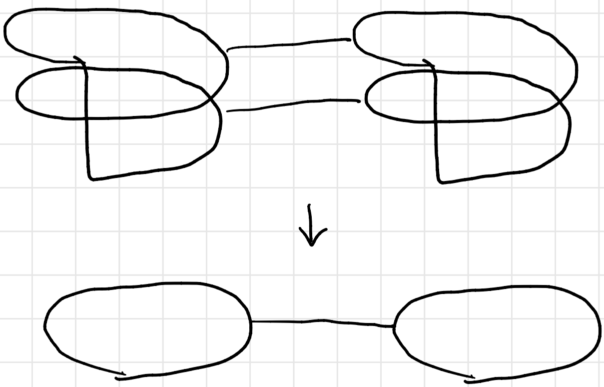


$$\begin{array}{ccc} S^1 & \ni & z \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^1 & \ni & z^n \end{array}$$

これを $S^1$ の n重ヒフクという

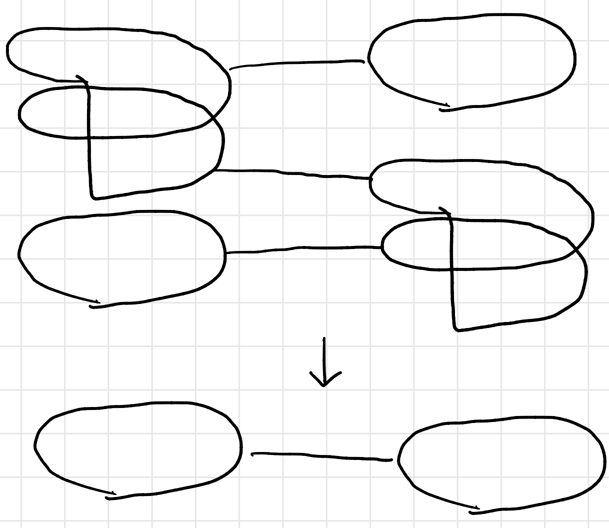
§4まで読むと
$S^1$ の連結なヒフク空間は
$\mathbb{R} \to S^1$ と
$S^1 \to S^1$ : n重ヒフク
のみに限られることがわかる

e.g.



"$S^1$ と $S^1$ を
ヒモでつなげたもの"

e.g.



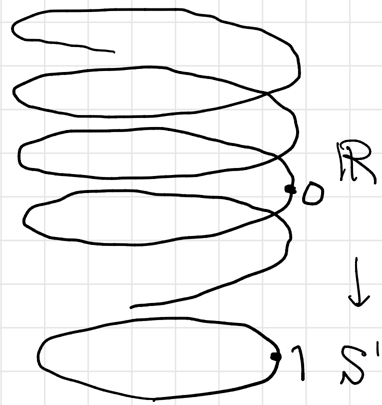
連結だが
Galoisでない
被覆空間

# Galoisの基本定理の具体例

e.g. $(\mathbb{R},0)\to(S^1,1)$ は

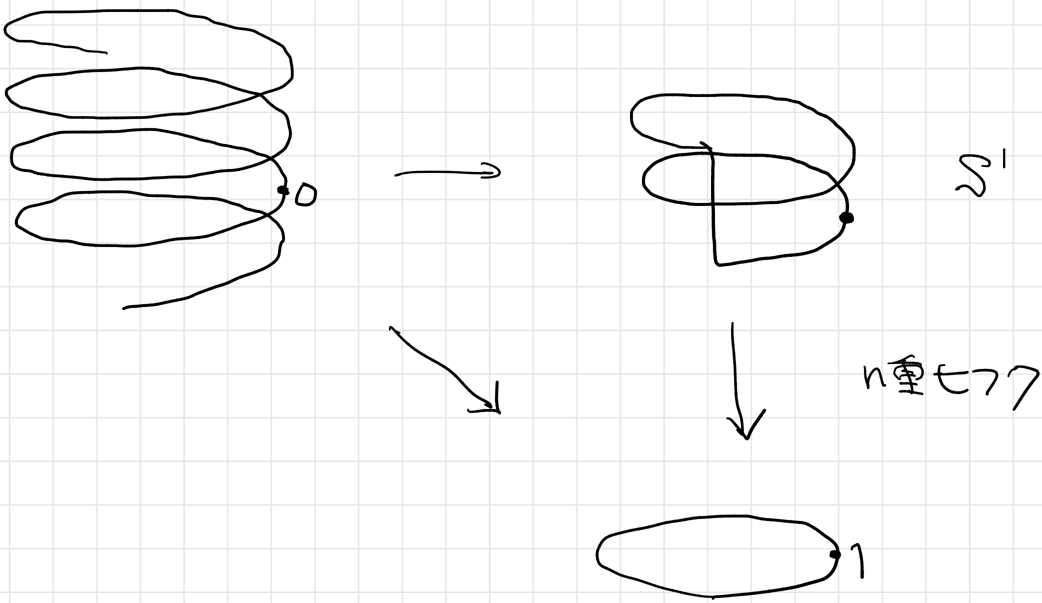
Galois被覆であり、

Aut群は $\mathbb{Z}$ に同型である



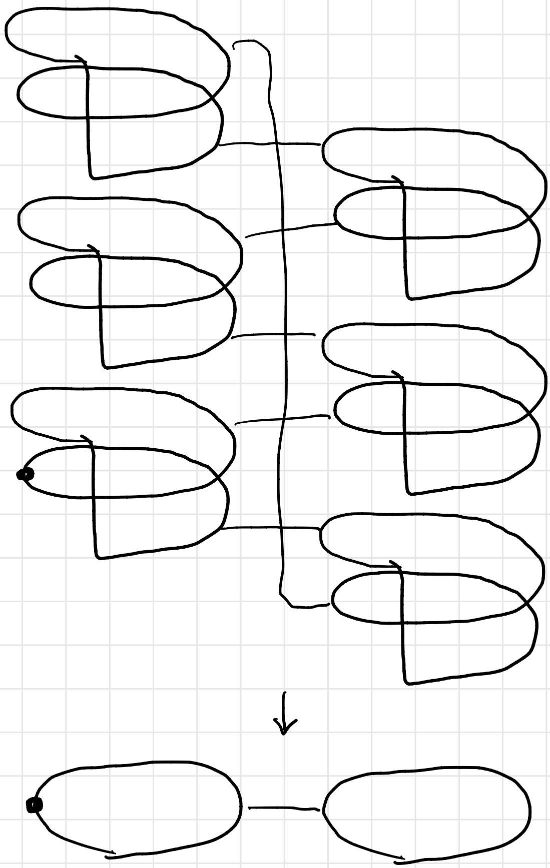

$\mathbb{Z}$の部分群は$n\mathbb{Z}$の形であり、

中間被覆は




となっている。

e.g.



この被覆空間はGaloisヒフクであり、

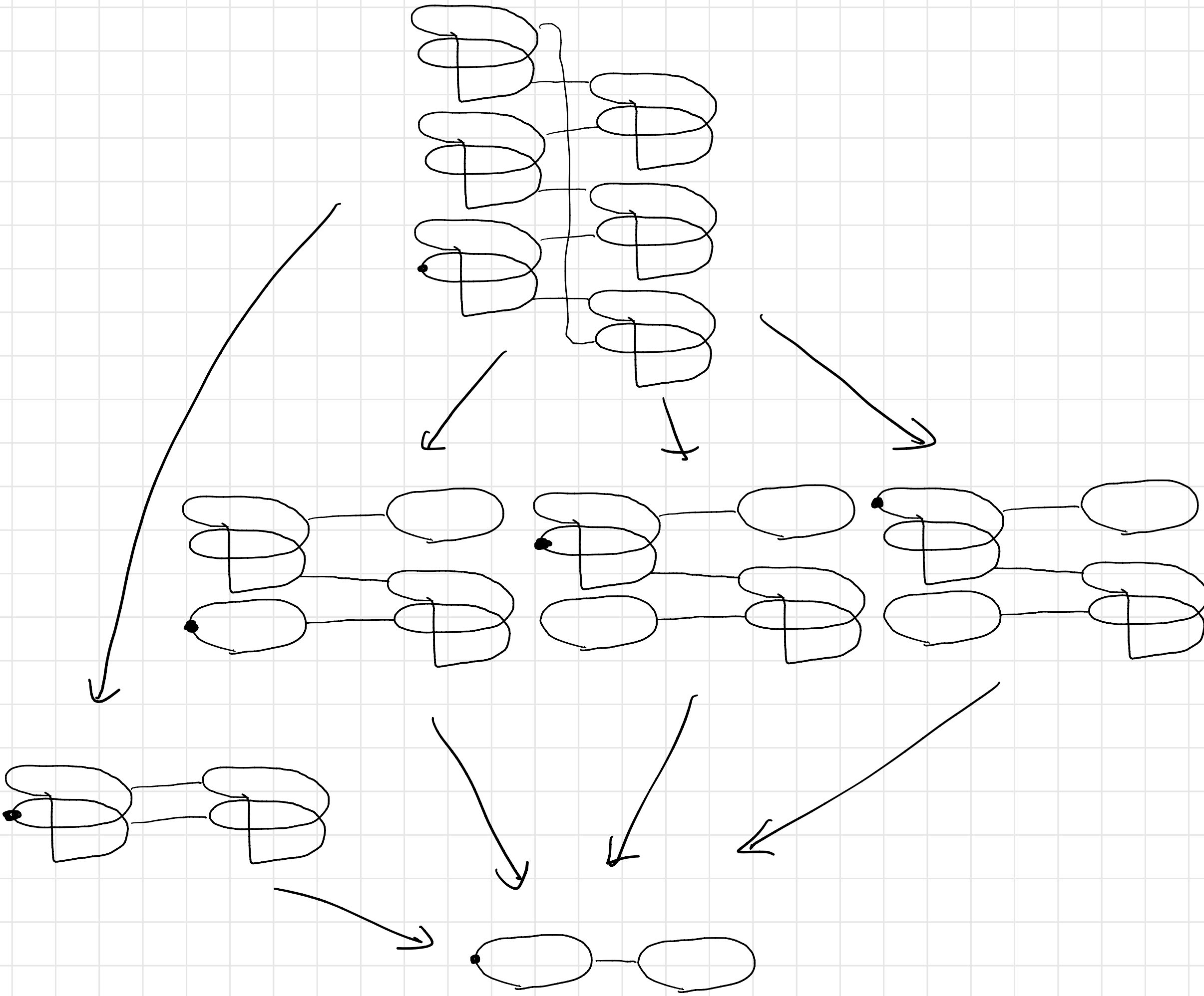
Aut群は$S_3$（3次対称群）に同型である

$S_3 = \{id, (12), (23), (31), (123), (132)\}$として、

部分群として$A_3 = \{id, (123), (132)\}$

$H_1 = \{id, (12)\}$, $H_2 = \{id, (23)\}$, $H_3 = \{id, (13)\}$

を持つので、それらに対応する中間ヒフクは



が考えられる

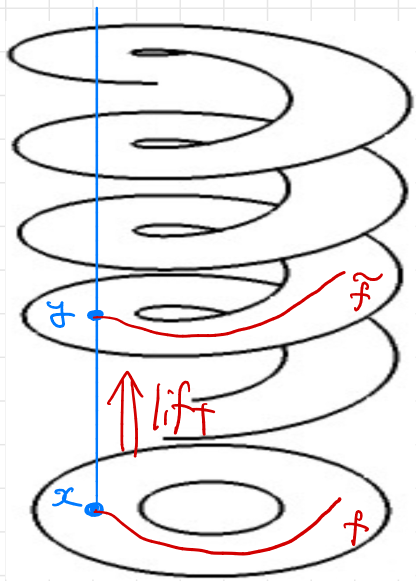
# 基本群の例

- $\pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z}$
- $\pi_1(S^2, *) \cong 0 \quad (S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\})$
- $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, x_2\}, *) \cong F_2 \quad (x_1 \neq x_2)$

  ($F_2$ : 2元生成自由群)

Lem 3.12 について

絵をかくと…



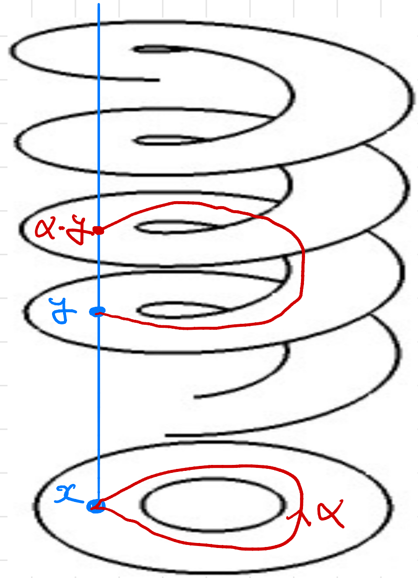
monodromy 作用

$\alpha \in \pi_1(X, x)$

$y \in p^{-1}(x)$ に対する

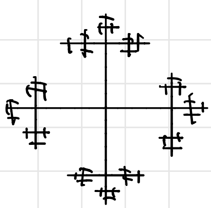
$\alpha \cdot y$ について

幾何学的に見ると…




# 普遍被覆空間の具体例

- $S^1$ の普遍被覆は $\mathbb{R} \to S^1$
- $S^1 \times \cdots \times S^1$ (n次元トーラス) の普遍被覆は
  $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \to S^1 \times \cdots \times S^1$
- $n \geq 2$ に対し、$\mathbb{R}P^n$ の普遍被覆は $S^n \to \mathbb{R}P^n$
  このことから $\pi_1(\mathbb{R}P^n, *) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ もわかる
- $S^1 \vee S^1$ ($= \infty$) の普遍被覆は

(ケイリーグラフ)  $\longrightarrow$ $\infty$